Une approche mathématique de la notion de limite
Par Paul Cabanac

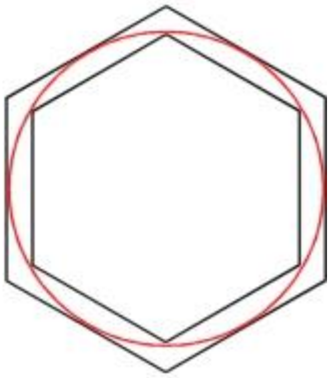
La notion de limite est permanente dans l'histoire des mathématiques. Elle est une préoccupation des mathématiciens grecs, arabes et indiens, alors qu'elle n'est pas encore nommée. Les mathématiques développées successivement par l'école Pythagoricienne, l'académie de Platon et par Archimède vont ouvrir des voies de raisonnement qui ne verront un réel aboutissement qu'au cours du XVIIème siècle avec les travaux de Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727).
Ce cheminement commencé avec l'aventure des nombres s'est longuement orienté autour de la recherche d'une continuité dans l'ensemble des nombres de la droite réelle. Les grecs géomètres ont, en particulier, approché la notion de limite dans leur tentative de définition des nombres transcendants. En suivant des démarches d'encadrement d'aires ou de séries de calculs, ils ont été les premiers à poser les bases du calcul intégral et différentiel, lequel est entièrement fondé sur les notions de fonction et de limite. En fait, ces mathématiciens philosophes avaient élaboré quelques-uns des principes essentiels préalables au calcul intégral.
Le cadre du présent exposé est volontairement restreint à l'approche intuitive de la notion de limite, avec toutefois des emprunts formels au domaine des mathématiques que l'on nomme « analyse » et des références aux objets qu'en sont les suites, les fonctions et les séries.
Suites
Nous entendons par suite de nombres, une succession illimitée de nombres que nous écrivons : x1, x2, x3, x4,………., xn,………
L'indice n indique le rang du nombre xn.
Ecrivons les cinq premiers termes des suites :
$1/5^n$: 0,2   0,04   0,008   0,0016   0,00032
$2+1/10^n$: 2,1   2,01   2,001   2,0001   2,00001   2,000001
$3/2^n$: 1,5   0,75   0,375   0,1875   0,09375
$2-1/10^n$: 1,9   1,99   1,999   1,9999   1,99999
$(-1)^a/2^n$: -0,5   0,25   -0,125   0,0625   -0,03125
Intuitivement, nous sentons que plus nous allons progresser dans les calculs et plus nous allons nous rapprocher de certaines valeurs : 0 pour la première ; 2 pour la seconde ; 2 pour la quatrième. Pour les troisième et cinquième suites il conviendrait de poursuivre davantage les calculs avant de nous faire une idée. Ces valeurs « appréhendées » intuitivement sont des valeurs limites des suites. Il est démontrable, par exemple, que 2 est la limite de la suite $2+1/10^n$. Nous aurions pu faire une autre observation : la suite $2+1/10^n$ et la suite $2-1/10^n$, lorsque nous calculons les valeurs prises à des rangs de plus en plus élevés se rapprochent respectivement de 2.
Nous dirons que la suite $2+1/10^n$ tend vers tout nombre inférieur à 2 et que sa limite est 2.
Existe-t-il d'autres cas ?
Examinons les suites : n, 2n, n^2, $(-1)^n$ et écrivons leurs premiers termes.
Suite   n : 1, 2, 3, 4, 5,………, n,……
2n : 2, 4, 6, 8, 10,………, 2n,……..
n^2 : 1, 4, 9, 16, 25,………., n^2, ……….
$(-1)^n$: -1, 1, -1, 1, -1, ……….., $(-1)^n$,………
Pour les trois premières, il y a progression permanente avec le rang des termes de la suite et pour la quatrième il y a deux valeurs possibles qui alternent avec le rang.
Nous dirons qu'il y a des suites qui convergent vers une limite. Dans le cas contraire elles sont dites divergentes.

e : l'histoire de la limite d'une suite inscrite au cœur de l'histoire des mathématiques, due à l'avidité à « toujours gagner plus » d'un banquier marchand lombard du XVIème siècle.
Résumons : si 1€ est placé au taux de 100%, à intérêts composés annuellement, pendant un an, le capital est de 2 € au bout d'un an. Si l'intérêt est composé semestriellement le produit est, au bout d'un an : $(1+1/2)^2 = 2{,}25$ €
Si l'intérêt est composé trimestriellement, le produit devient : $(1+1/4)^n = 2{,}441$ €, avec $n = 4$
Au bout de n périodes, le produit s'écrit symboliquement : $(1+1/n)^n$. On pourrait penser qu'il s'accroît indéfiniment ?

n	1	2	4	10	100	1000	….
$(1+1/n)^n$	2	2,25	2,4414..	2,5937…	2,7048…	2,7169…	….

………………… alors qu'il ne pourra pas dépasser 2,72 € !
En effet, la limite de la suite de nombres $(1+1/n)^n$ est 2,71828……

π : l'histoire d'une limite due à l'obstination des chercheurs d'aires !



Les « géomètres » grecs ont eu cette idée d'encadrement du disque par des polygones. Ils savaient calculer leurs aires, ils ont pu ainsi approcher l'aire du disque limite des deux suites.

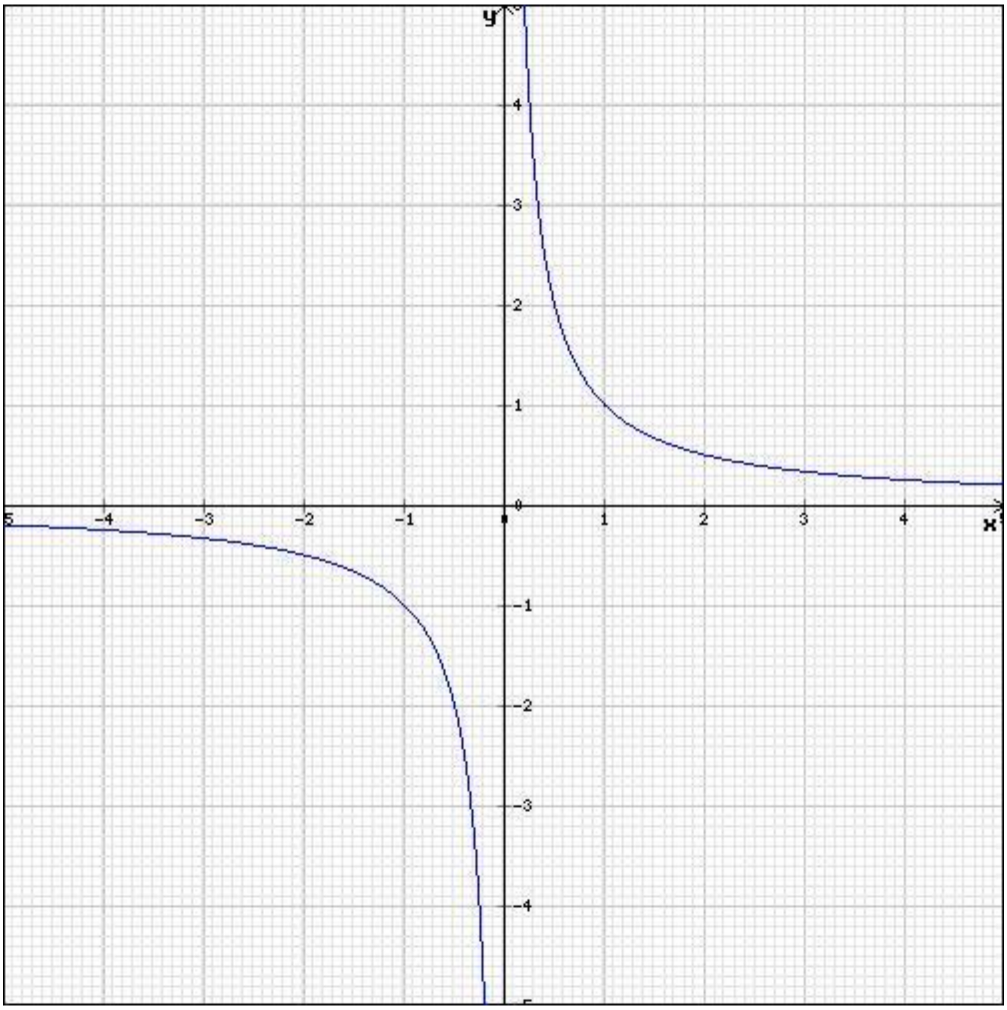
Nombre de côtés	Aire du polygone inscrit	Aire du polygone circonscrit	Approximation pour π
4	2	4	3
8	2,8284	3,3137	3
16	3,0615	3,1826	3 +
32	3,1214	3,1517	3,1 +
64	3,1365	3,1441	3,13 +
128	3,1403	3,1422	3,14 +
256	3,1418	3,1418	3,141 +

Cette méthode dite « d'Archimède » contient en germe la méthode de ce que nous appelons calcul intégral. Il s'agit de rechercher par approximations l'aire d'une surface curviligne à partir d'aires polygonales. Les ordinateurs permettent de calculer les décimales de π :
3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 0679……………………………………

Fonctions

Il est aisé de passer de la notion de suite à celle de fonction. Une fonction est la mise en correspondance de deux suites de nombres. Nous utilisons comme support à notre approche, la fonction inverse, c'est-à-dire la fonction qui associe à tout nombre son inverse.

La courbe de la fonction inverse : f : x->f(x)=1/x



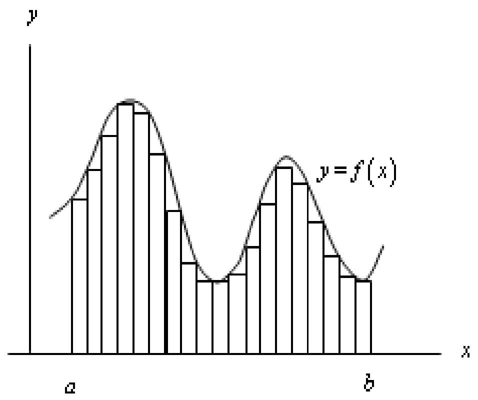
Nous nous intéressons aux deux situations « particulières » que sont les valeurs correspondant aux très grandes valeurs de x ou aux valeurs de x qui se rapprochent de plus en plus de zéro. Dans le premier cas nous disons que x tend vers l'infini, dans le second que x tend vers 0.

Premier cas : x tend par valeurs positives ou par valeurs négatives vers l'infini, alors la quantité 1/x devient de plus en plus proche de 0, sans jamais l'atteindre ! Nous disons que la fonction a pour limite 0 lorsque x tend vers l'infini.

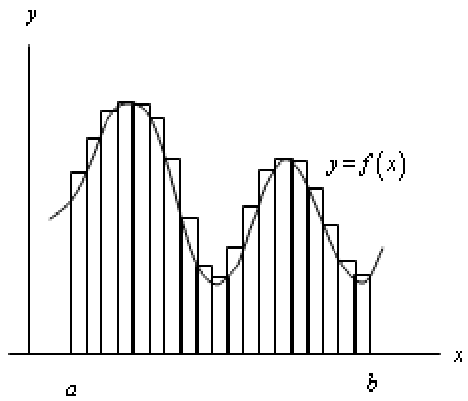
Deuxième cas : x tend vers 0. Les valeurs de la fonction tendent alors vers l'infini. Nous disons que lorsque x tend vers 0 alors la limite de la fonction est infinie.

Limites d'intégration

Le raisonnement utilisé dans la méthode d'Archimède peut s'étendre au calcul d'aires en général. Les schémas qui suivent représentent une courbe représentative d'une fonction. Nous avons choisi deux points a et b sur l'axe horizontal. Nous divisons l'intervalle entre a et b et construisons des rectangles « au-dessous » et « au-dessus » de la courbe.



Somme minorante



Somme majorante

L'aire que nous voulons calculer est comprise entre les deux aires sommes des rectangles. Plus nous réaliserons de subdivisions, plus nous nous rapprocherons de la valeur d'aire sous la courbe. La limite d'une telle somme s'appelle l'intégrale définie de la fonction. Les nombres a et b sont appelés limites d'intégration.

Les séries

Intéressons-nous à la suite $1/2^n$ et écrivons les premiers termes :

½ ¼ 1/8 1/16 1/32 …………… $1/2^n$ ……………

La somme des termes d'une suite est appelée série.

$S_n = ½ + ¼ + 1/8 + 1/16 + ………. + 1/2^n + ……….$

Nous pouvons faire les calculs des termes :

$S_1 = ½$ $S_2 = ½ + ¼ = ¾$ $S_3 = ½ + ¼ + 1/8 = 7/8$

D'une manière générale : $S_n = (2^n - 1)/2^n$

La somme des termes de la série est la valeur limite 1. Si grand que soit le nombre n, la somme des n premiers termes n'est jamais égale à 1, mais lorsque le nombre n augmente indéfiniment, Sn tend vers 1.

Regard historique : « Le paradoxe de Zénon »

Au Vème siècle av J.C, Zénon raisonnait de la manière suivante : si quelqu'un doit atteindre un point distant de 1 unité de mesure, il n'y arrivera jamais. Il doit d'abord parcourir la moitié du trajet, puis la moitié restante, et ainsi de suite. Il lui faut donc parcourir une suite illimitée d'intervalles qui prendra donc un temps infini. Ce paradoxe fit l'objet, à travers l'histoire, de discussions …………………………………… infinies !

Ce n'est pourtant pas un paradoxe. Il suffit de réaliser que la somme d'un nombre illimité de termes peut fort bien être un nombre fini. S'il faut à un individu une heure pour faire un kilomètre, il en fera la première moitié en une demi-heure, la moitié de la part restante en un quart d'heure, et ainsi de suite. Il lui faut :

$½ + ¼ + 1/8 + ….. + 1/2^n + …….$ d'heure pour effectuer 1 kilomètre. En dépit du fait que le nombre de ces additions soit illimité, la somme est toujours une heure.

Le même problème était connu sous le nom du « paradoxe d'Achille et de la tortue »