L'Infini

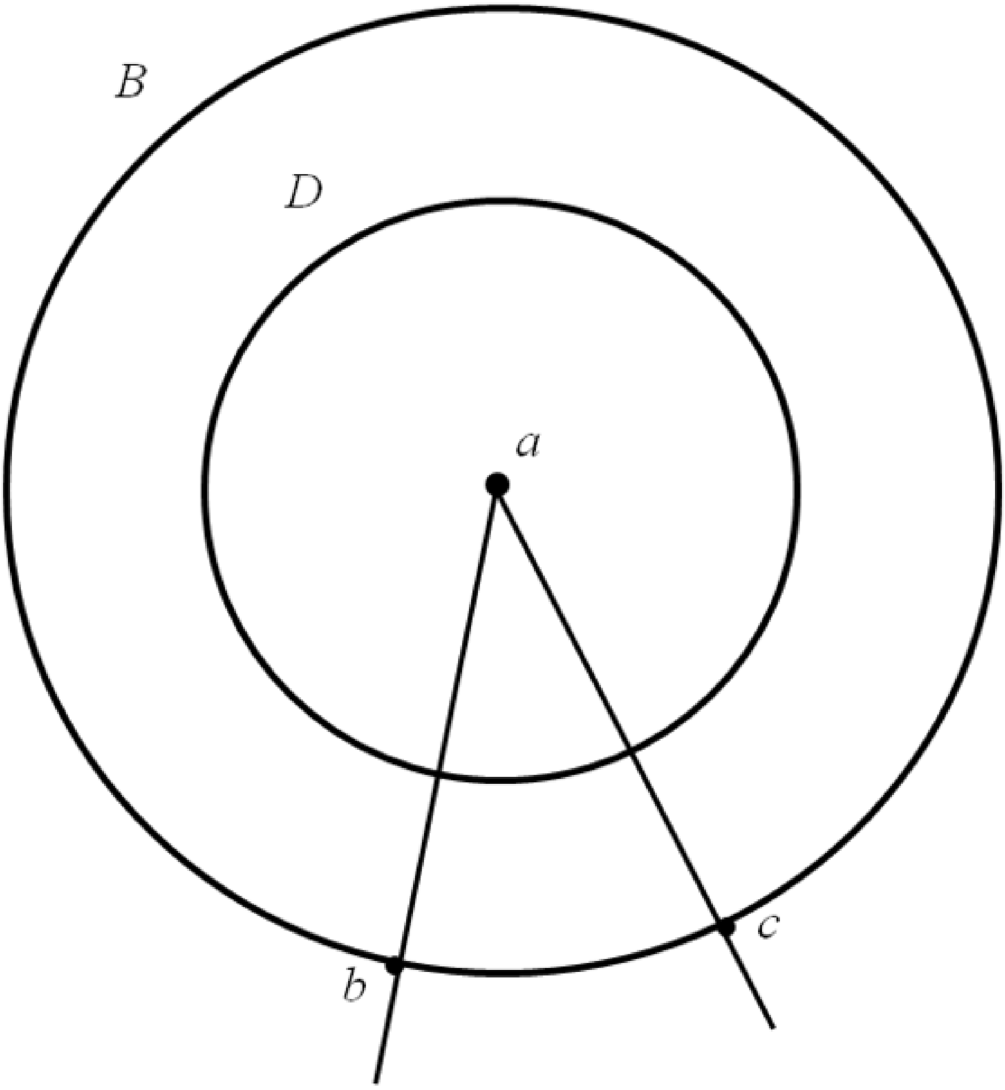
∞ (*John* ***Wallis***, 1655)

Yves Ousset

Plan de l'exposé

- L'infini et ses paradoxes : 2 exemples.
- Tentative pour une définition de l'infini.
- Cantor : les infinis et leur mesure.
- Conclusion sur l'indécidabilité.

Jean Duns Scot (1266 - 1308)



Résultat **:** L'intersection avec le rayon établit une **relation biunivoque** (**bijection**) entre les points des 2 cercles.

Conséquence **:** Il y a autant de points dans *D* que dans *B.*

ET POURTANT

B est plus grand que *D*

Galilée (1564 – 1642)

Carré des nombres entiers :

- A tout entier strictement positif n (on dit aussi entier naturel), on peut associer son carré n^2
- Inversement, à tout carré parfait m, on peut associer sa racine carrée $\sqrt{m}$ qui est un entier naturel.

Résultat : La fonction carré et son inverse, la fonction racine carrée, établissent une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des carrés parfaits.

Conséquence : Il y a autant de carrés parfaits que d'entiers naturels.

ET POURTANT

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

Quel que soit un sous-ensemble fini d'entiers, il contient plus d'entiers que de carrés parfaits.

Qu'est-ce que l'infini ?

Définition (lapalissade) : Est infini ce qui n'est pas fini.

Qu'est-ce que le fini ?

10 est fini ; 10+1 est fini ; ...

Théorème : Si m et n sont 2 entiers finis, alors :

- Leur somme m + n est finie.
- Leur produit m × n est fini.
- La puissance n^m est finie.

Exemple :

- 10 est fini
- 10 × 10 = 100 est fini
- 10^{10} = 10 milliards est fini (et c'est grand)
- $10^{10^{10}}$ = énorme et c'est fini.
- Et on peut continuer… .

Alors, c'est quand l'infini ?

D'où l'idée qui a prévalu pendant longtemps selon laquelle l'infini est une potentialité.

Définition : Une suite (x_n) → (tend vers) +∞ si, $\forall$ (quel que soit) le nombre a pris aussi grand que l'on veut, $\exists$ (il existe) un entier k tel que :

$$n > k \Longrightarrow (entraine)\ x_n > a$$

Autrement dit, en langage courant : quel que soit le nombre a choisi aussi grand que l'on veut, tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux, sont plus grands que a.

Georg Cantor (1845 – 1918)

C'est l'un des fondateurs de la théorie des ensembles et ce sont ses travaux sur cette théorie qui l'amenèrent à se frotter à l'infini (étude des ensembles infinis).

- Il y a plusieurs infinis ; il y a donc des infinis plus infinis que d'autres. Ils peuvent être classés par ordre croissant.
- Pour mesurer ces infinis, il introduit les nombres transfinis qu'il désigne par la lettre (aleph : 1e lettre de l'alphabet hébreu). Si E est un ensemble infini, on dit que sa « taille » (le « nombre » de ses éléments) est = card(E) (cardinal de E)
- Il définit des opérations sur les transfinis : si c est un nombre positif fini, alors :

  $+ c =$

  $c \times =$

  $\aleph^{c} =$

- Le plus petit des infinis est celui de l'ensemble **N** des entiers naturels. On note $\aleph_0$ = card(**N**)
- Le cardinal de l'ensemble **Q** des nombres rationnels est aussi $\aleph_0$.
- Tout ensemble infini ayant le même cardinal que **N** est dit dénombrable. **Q** est donc dénombrable.
- L'ensemble **R** des nombres réels a pour cardinal $2^{\aleph_0} > \aleph_0$: l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

En conclusion

Hypothèse du continu : Si $\aleph_1$ ($\aleph_1 > \aleph_0$) est le cardinal du plus petit ensemble non dénombrable, Cantor pose que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

- En 1940, ***Kurt Gödel*** a démontré l'impossibilité que cette hypothèse soit fausse.
- En 1963, ***Paul Cohen*** a démontré l'impossibilité que cette hypothèse soit vraie.

Nous sommes en présence d'une proposition indécidable ! Ce cas est prévu par le théorème d'incomplétude de ***Gödel*** (1931).

1er théorème d'incomplétude *(forme simplifiée)* **:** Dans n'importe quelle théorie mathématique axiomatisable et capable de formaliser l'arithmétique, on peut construire un énoncé qui ne peut être ni prouvé, ni réfuté dans cette théorie. De tels énoncés sont dits indécidables.